ediciones sm

Tendencia y continuidad

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - x} - 3}{\sqrt{x + 4} - 2}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + 1)^2 - 4}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} - x\right)$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x})$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log x$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$

4. Estudia la continuidad de la función $f(x) = |x|$ en $x = 0$.

5. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

6. Establece los puntos de continuidad e indica las características de las discontinuidades de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x - 1 & \text{si } x \in (0, 1) \\ 2x & \text{si } x \in (1, 3) \\ x + 2 & \text{si } x \in [3, 7] \\ \dfrac{1}{x - 7} & \text{si } x > 7 \end{cases}$$

7. Sea $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. ¿Qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$?

8. Razona si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si $a \notin D(f)$, entonces es imposible que exista $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

b) Si f es una función par y $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$, entonces $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = 4$.

c) Si $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$, entonces $f(2) = 6$.

SOLUCIONES

1. a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$

$= \lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x\to 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{9-x}-3)(\sqrt{9-x}+3)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{9-x}+3)(\sqrt{x+4}+2)} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(9-x-9)(\sqrt{x+4}+2)}{(x+4-4)(\sqrt{9-x}+3)} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-x(\sqrt{x+4}+2)}{x\sqrt{9-x}+3} =$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-(\sqrt{x+4}+2)}{\sqrt{9-x}+3} = \dfrac{-4}{6} = \dfrac{-2}{3}$

2. a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{1} = \dfrac{1+0-0}{1} = 1$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x}}}{1-\dfrac{1}{x}} - x\right) = \dfrac{\sqrt{1-0}}{1-0} - \infty = -\infty$

c) $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) = \infty - \infty =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} =$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})} = \dfrac{2}{\infty+\infty} = 0$

3. a) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

c) $\lim_{x\to-\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \dfrac{1}{2^\infty} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

4. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0^-} (-x) = \lim_{x\to 0^+} x = f(0) = 0$; por tanto, es continua en $x = 0$.

5. Es una función a trozos. Cada una de las funciones parciales es continua en su dominio; por tanto, f es continua en $(-\infty, 2)$ y $(2, +\infty)$. Se trata de estudiar la continuidad en el punto de unión, $x = 2$.

$f(2) = 5$, $\lim_{x\to 2^-} (3x-1) = 5 \neq \lim_{x\to 2^+} (x^2+2) = 6$

En $x = 2$ hay una discontinuidad de salto finito.

6. Es una función a trozos. Cada una de las funciones parciales es continua en su dominio; por tanto, f es continua en $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 7)$ y $(7, +\infty)$.

$f(0) = -1$, $\lim_{x\to 0^-} (x^2-1) = \lim_{x\to 0^+} (3x-1) = -1$

Por tanto, en $x = 0$ f es continua.

En $x = 1$ la función no está definida; por tanto, no es continua.

$f(3) = 5$, $\lim_{x\to 3^-} (2x) = 6 \neq \lim_{x\to 3^+} (x+2) = 5$

En $x = 3$ hay una discontinuidad de salto finito.

$f(7) = 9$, $\lim_{x\to 7^-} (x+2) = 9 \neq \lim_{x\to 7^+} \dfrac{1}{x-7} = +\infty$

En $x = 7$ hay una discontinuidad de salto infinito.

7. Es una función a trozos. Cada una de las funciones parciales es continua en su dominio; por tanto, f es continua en $(-\infty, 1)$ y $(1, +\infty)$. Se trata de calcular el valor de a para que f sea continua en $x = 1$.

$f(1) = 2$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3 - a$

Por tanto, $3 - a = 2 \Rightarrow a = 1$

Solución: $a = 1$.

8. a) Falso. Puede existir el límite en un punto en el que la función no esté definida.

b) Verdadero. Las funciones pares son simétricas respecto al eje de ordenadas.

c) Falso. Puede existir el límite en un punto en el que la función no esté definida.